受験番号								氏名	

令和５年度前期日程試験解答用紙（数学）

【 解 答 例 】

〔注意事項〕

・監督者の指示があるまで解答用紙を開いてはいけません。

・全てのページの所定欄に受験番号、氏名を記入しなさい。

受験番号								氏名	

令和５年度前期日程試験解答用紙（数学）

第１問

(1) 偽。$a=-b$ もあり得る。

(2) 真。

対偶命題は「$x>2$ かつ $y>2$ ならば，$x+y>4$」であり，これは真である。したがって，元の命題は真である。

(3) 偽。$n=12$ は 4 の倍数かつ 6 の倍数だが 24 の倍数ではない。

(4) 偽。2 は素数である。

(5) 真。

$f(x)$ に極大値と極小値が存在するので，$f'(x)=3x^2+4x+k=0$ は 2 つの実数解 $x=\alpha$，β $\quad(\alpha<\beta)$ を持つ。このとき、極大値は $f(\alpha)$，極小値は $f(\beta)$ であり，それらの和が 0 ならば，

$$f(\alpha)+f(\beta)=\alpha^3+2\alpha^2+k\alpha+\beta^3+2\beta^2+k\beta=0$$

が成り立つ。一方，α と β は 2 次方程式 $3x^2+4x+k=0$ の解なので

$$\alpha+\beta=-\frac{4}{3}, \qquad \alpha\beta=\frac{k}{3}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta) &= \alpha^3+2\alpha^2+k\alpha+\beta^3+2\beta^2+k\beta \\ &= (\alpha+\beta)\left\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\right\}+2\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\} \\ &\quad +k(\alpha+\beta) \\ &= \frac{32}{27}-\frac{4}{3}k=0 \end{aligned}$$

が成り立ち，$k=\dfrac{8}{9}$ である。

第１問 得　点	

受験番号							氏名	

令和５年度前期日程試験解答用紙（数学）

第２問

(1) (i) より $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ である。

(ii) より，$f(-2) = -8 + 4a - 2b + c = 0$・・・(ア)

(iii) より，$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = -25$・・・(イ)

(iv) より $x = 3$ で極値を取るので導関数の値 $f'(3) = 0$ である。よって $27 + 6a + b = 0$・・・(ウ)

(ア)(イ)(ウ) を連立一次方程式として解くと $a = -3,\ b = -9,\ c = 2$ となる。この値を代入して，$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ を得る。

ここで $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$ となり，$f(3) = -25$ は極小値と確認できる。

答え: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

(2) x のある区間で $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ の値が正であるとき，その区間で x が増えるにつれて $g(x)$ が増加する。また、$g'(x)$ が負であるときはその区間で x が増えるにつれて $g(x)$ が減少する。

$\sin\theta$ は $0 < \theta < \pi/2$ で増加する。ここで $d > 0, e > 0$ より, $d \sin\ ex\ \ + h$ は $0 < x < \frac{\pi}{2e}$ で増加するので (ii) に反する。$d \cos\ ex\ \ + h$ は $0 < x < \pi/e$ で減少し，$\pi/e < x < 2\pi/e$ で増加するので，$e = \pi/10$ の時のみ (ii) と (iii) を満たす。

実数 x と $e > 0$ について $\cos ex$ の最大値は 1，最小値は -1 なので，$d > 0$ のとき $d \cos\ ex\ \ + h$ の最大値は $d + h$ ，最小値は $-d + h$ である。(iv) より連立方程式 $d + h = 5$，$-d + h = 1$ を解いて，$d = 2$，$h = 3$ 。

答え: $g(x) = 2\cos(\frac{\pi}{10}x) + 3$

第２問 得　点	

受験番号							氏名	

令和５年度前期日程試験解答用紙（数学）

第３問

(1)　2023 を素因数分解すると，$2023 = 7 \times 17^2$ である。

(2)　2023 に $7^2 \times 17$ を掛けると，$(7 \times 17)^3$ となるので，求める自然数は $7^2 \times 17 = 833$ である。

(3)　まず，整数解を求める。与えられた方程式の両辺を 7 で割って

$$7x + 13y = 289 \tag{A}$$

更に変形して，$7(x-41) + 13y = 2$ となる。$7 \times 4 + 13 \times (-2) = 2$ であるので，(A) を満たす整数解の 1 つは，$x = 45$，$y = -2$ である。これを (A) に代入すると，

$$7 \times 45 + 13 \times (-2) = 289 \tag{B}$$

(A)$-$(B) から，$7(x-45) + 13(y+2) = 0$ を得る。変形して

$$7(45 - x) = 13(y + 2) \tag{C}$$

7 と 13 は互いに素であるから，$45 - x$ は 13 の倍数。よって，m を整数として，$45 - x = 13m$，すなわち，$x = 45 - 13m$ と書ける。このとき，(C) から，$7m = y + 2$，すなわち，$y = 7m - 2$ となる。

次に，自然数解を求める。x，y は自然数だから，$x = 45 - 13m > 0$，すなわち，m は 3 以下。また，$y = 7m - 2 > 0$，すなわち，m は 1 以上。したがって，求める自然数の組は $(x,\ y) = (32,\ 5)$，$(19,\ 12)$，$(6,\ 19)$ である。

(4)　与えられた方程式を変形して

$$(x+16)(y+116) - 16 \times 116 - 167 = 0$$
$$(x+16)(y+116) = 2023$$

x，y は自然数だから，左辺の $x + 16$，$y + 116$ はともに整数で，それぞれ 16，116 よりも大きい。

一方，右辺の 2023 の約数は，1，7，17，119，289，2023 の 6 つ。よって，

$$\begin{cases} x + 16 = 17 \\ y + 116 = 119 \end{cases}$$

したがって，求める自然数の組は $(x,\ y) = (1,\ 3)$ である。

第３問 得　点	

受験番号								氏名	

令和５年度前期日程試験解答用紙（数学）

第４問

(1) $\dfrac{c}{2}a^2 + \dfrac{1}{2c}b^2 - ab = \left(\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}}a - \dfrac{1}{\sqrt{2c}}b\right)^2 \geqq 0$

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kp^{(k-1)}$ とおくと，

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \cdots + np^{(n-1)} \\ pS_n &= \quad\; p + 2p^2 + 3p^3 + \cdots + (n-1)p^{(n-1)} + np^n \end{aligned}$$

この両辺同士をそれぞれ引くと，

$$(1-p)S_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1} - np^n = \frac{1-p^n}{1-p} - np^n$$

よって，

$$S_n = \frac{1-p^n}{(1-p)^2} - \frac{np^n}{1-p}$$

(3) $k = 2^{\frac{q}{2}}$ とおくと，(1) より，任意の $c > 0$ に対して，

$$k\sqrt{AB} \leqq \frac{kc}{2}A + \frac{k}{2c}B$$

が成り立つ。よって，$c = 1/k$ ととると，

$$A \leqq k\sqrt{AB} + k^2B \leqq \frac{1}{2}A + \frac{3k^2}{2}B$$

したがって，

$$A \leqq 3k^2B = 3 \cdot 2^q B$$

(4) $q = b_n$, $A = a_{n+1}$, $B = a_n$ とおくと，(3) より，任意の自然数 n に対して，

$$a_{n+1} \leqq 3 \cdot 2^{b_n} a_n$$

が成り立つ。これを繰り返し用いることで，(2) より，

$$\begin{aligned} a_{n+1} \leqq 3 \cdot 2^{b_n} a_n &\leqq 3 \cdot 2^{b_n} \times 3 \cdot 2^{b_{n-1}} a_{n-1} \\ &\leqq \cdots \\ &\leqq \underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{n\text{ 個}} \cdot 2^{b_n} \cdot 2^{b_{n-1}} \cdots 2^{b_2} \cdot 2^{b_1} a_1 \\ &= 3^n \cdot 2^{b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1} a_1 \\ &= 3^n \cdot 2^{\sum_{k=1}^{n} b_k} a_1 \\ &= 3^n \cdot 2^{S_n} a_1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

第４問 得　点	