数　学

（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ａ・数Ｂ）

（注意事項）

1. 解答開始の指示があるまで問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子と解答用紙は別になっています。
3. 解答用紙の各ページの所定欄に受験番号，氏名を記入しなさい。
4. 計算等が必要な場合は問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 試験終了後は問題冊子を持ち帰りなさい。

数学

第 1 問

次の命題の真偽をそれぞれ調べよ。偽の場合には反例を示し，真の場合には証明せよ。

(1) 0 ではない 2 つの実数 a，b について，$a^2 = b^2$ ならば $a = b$ である。

(2) 実数 x，y について，$x + y \leqq 4$ ならば，$x \leqq 2$ または $y \leqq 2$ である。

(3) 自然数 n が 4 の倍数かつ 6 の倍数ならば，n は 24 の倍数である。

(4) 自然数について，すべての偶数は素数ではない。

(5) k は実数の定数とする。実数 x について，x の 3 次関数 $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx$ の極大値と極小値が存在し，かつ，それらの和が 0 ならば，$k = \dfrac{8}{9}$ である。

第 2 問

以下は関数 $f(x), g(x)$ の性質について記述したものである。それぞれについて，実数の定数 a, b, c, d, e, h の値を具体的に求め，関数 $f(x), g(x)$ を式で示せ。

(1) $f(x)$ は次の性質や条件を持つ。

(i) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ である。

(ii) $x = -2$ は方程式 $f(x) = 0$ の解である。

(iii) $f(3) = -25$　である。

(iv) $f(x)$ は $x = 3$ で極小値をとる。

(2) $g(x)$ は次の性質や条件を持つ。

(i) $g(x) = d \sin ex + h$ または $g(x) = d \cos ex + h$ のどちらか一方であり，$d > 0$, $e > 0$ である。

(ii) $0 < x < 10$ のとき $g'(x) < 0$　である。

(iii) $10 < x < 20$ のとき $g'(x) > 0$　である。

(iv) $g(x)$ の最大値は 5，最小値は 1 である。

数学

第 3 問

以下の問に答えよ。

(1) 2023 を素因数分解せよ。

(2) n を自然数とする。$2023n$ がある自然数の 3 乗になるような n のうち，最小のものを求めよ。

(3) 方程式

$$49x + 91y = 2023$$

を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(4) 方程式

$$xy + 116x + 16y - 167 = 0$$

を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

第 4 問

以下の問に答えよ。

(1) 任意の実数 a, b および正の実数 c に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$ab \leqq \frac{c}{2}a^2 + \frac{1}{2c}b^2$$

(2) $0 < p < 1$ の定数 p に対して，

$$\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} = \frac{1-p^n}{(1-p)^2} - \frac{np^n}{1-p}$$

が成り立つことを示せ。ただし，等比数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} p^{k-1} = \frac{1-p^n}{1-p}$$

は用いてよい。

(3) q を正の実数とする。0 以上の実数 A, B が，

$$A \leqq 2^{\frac{q}{2}}\sqrt{AB} + 2^q B$$

を満たすとき，

$$A \leqq 3 \cdot 2^q B$$

が成り立つことを示せ。

（次ページに続く）

数学

(4) p を $0 < p < 1$ の定数とし，数列 $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$b_n = np^{n-1}$$

と定義する。各項が 0 以上の数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が，任意の自然数 n に対して，

$$a_{n+1} \leqq 2^{\frac{b_n}{2}} \sqrt{a_{n+1} a_n} + 2^{b_n} a_n$$

を満たすとき，任意の自然数 n に対して，

$$a_{n+1} \leqq 3^n \cdot 2^{S_n} a_1$$

が成り立つことを示せ。ここで，

$$S_n = \frac{1 - p^n}{(1-p)^2} - \frac{np^n}{1-p}$$

である。